0.1　ファイバー束の Spectral 列

Definition 0.1.1

$p: E \longrightarrow X$ を fibration とし、X は CW 複体で $X^{(0)} = *$ であるものとする。X には skelton filter$\{X_s\}$ が存在するので、$E_s = p^{-1}(X_s)$ とおけば、$E_{-1} = \phi, E_0 = F$ となる $\{E_s\}$ は E の filter である。

Lemma 0.1.2

$\{E_s\}$ は E の連結な filter である。

proof)　$p: E \longrightarrow X$ を fibration とすると、その制限 $p_s: E_s \longrightarrow X_s$ も fibration である。これより、

$$p_*: \pi_*(E, F) \longrightarrow \pi_*(X) \quad , \quad p_{s*}: \pi_*(E_s, F) \longrightarrow \pi_*(X_s)$$

が全単射となるので、(E, E_s, F) と (X, X_s) の完全列と five lemma から、$p_*: \pi_n(E, E_s) \longrightarrow \pi_n(X, X_s)$ が全単射であるので、$\{X_s\}$ は連結な filter なので、$n \leqq s$ に対し $\pi_n(E, E_s) = \pi_n(X, X_s) = 0$

□

Remmark 0.1.3

$p: E \longrightarrow X$ を CW 複体上の fibration とすれば、E の連結な filter$\{E_s\}$ に対し（コ）ホモロジースペクトル列、$\{E_r^{**}(E; M)\}$, $\{E_r^{**}(E; M)\}$ を考えられる。

Lemma 0.1.4

$p: E \longrightarrow X$ で X は可縮な fibration とする。このとき、p は自明な fibration$X \times F \longrightarrow B$ と同型である。また、このとき、$\varphi, \chi: X \times F \longrightarrow E$ をそのような fiber homotopy equivalence し、ある $x \in X$ に対し、$\varphi_{|_{\{x\} \times F}} \simeq \chi_{|_{\{x\} \times F}}$ ならば、φ と χ は fiber homotopic である。

proof)　X を可縮な 空間とし、$p: E \longrightarrow X$ を fibration とする。このとき、X 上の恒等射と定値写像が homotopic なのだから、その pull back は fibration の同型となる。ところで、恒等射の pull back は $p: E \longrightarrow X$ 自身であるし、定値写像の pull back は自明束 $X \times F \longrightarrow X$ である。

また後半の主張は、X が可縮なので、定値射 c_x と恒等射は homotopic になり、

$$\begin{tikzcd} X \times F \arrow[r, "c_x \times 1"] \arrow[d, "="'] & X \times F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "="'] & E \arrow[d, "="] \\ X \times F \arrow[r, "="'] & X \times F \arrow[r, "\varphi"'] & E \end{tikzcd}$$

の図式は homotopy 可換で上の合成が $\varphi_{|_{\{x\}\times F}}$ と思ってよい。χ にも同じことを施して繋げれば、$\varphi \simeq \chi$ であることがわかる。

□

Lemma 0.1.5

$p : E \longrightarrow X$ を fibration とする。$f : Y \longrightarrow X$ が同相ならば、$p^*(f) : f^*(E) \longrightarrow E$ は fiber homotopy equivalence である。

proof)　　仮定より $g : X \longrightarrow Y$ が存在し、$f \circ g = 1$, $g \circ f = 1$ を満たす。

$$\begin{tikzcd} g^*(f^*(E)) = E \arrow[r] \arrow[d] & f^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

下の合成が恒等射であり、その pull-back も恒等射であったので、題意は示される。

□

Lemma 0.1.6

$p : E \longrightarrow X$ を CW 複体上の fibration とする。X の n 胞体 e_λ の特性写像、

$$\varphi_\lambda : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X_n, X_{n-1})$$

を考えたとき、D^n は可縮なので、φ_λ の pull back $\varphi^*(D^n)$ は自明束と考えてよい。よって bundle map

$$\tilde{\varphi_\lambda} : D^n \times F \longrightarrow E$$

を考えれば、これは対の写像、

$$\tilde{\varphi_\lambda} : (D^n \times F, S^{n-1} \times F) \longrightarrow (E_n, E_{n-1})$$

と考えられる。このとき、

$$\oplus\tilde{\varphi}_{\lambda *} : \oplus H_*(D^n \times F, S^{n-1} \times F; M) \longrightarrow H_*(E_n, E_{n-1}; M)$$

は同型である。

proof) D^n の部分空間、

$$D_0^n = \{x \in D^n | 0 \leqq |x| \leqq 1/2\} \quad , \quad D_1^n = \{x \in D^n | 1/2 \leqq |x| \leqq 1\}$$

を考える。D_0^n は可縮で、S^{n-1}は D_1^n の強変位 retract であり、$D_{1/2}^n = D_0^n \cap D_1^n \cong S^{n-1}$ とおく。

$$\begin{tikzcd}
\oplus H_*(D^n \times F, S^{n-1} \times F) \arrow[r] \arrow[d, "\oplus\tilde{\varphi_\lambda}"'] & \oplus H_*(D^n \times F, D_1^n \times F) \arrow[d, "\oplus\tilde{\varphi_\lambda}"] & \oplus H_*(D_0^n \times F, D_{1/2}^n \times F) \arrow[l] \arrow[d, "\oplus\tilde{\varphi_\lambda}"] \\
H_*(E_n, E_{n-1}) \arrow[r] & H_*(E_n, E_{n-1} \cup p^{-1}\varphi(D_1^n)) & H_*(\cup p^{-1}\varphi_\lambda(D_0^n), \cup p^{-1}\varphi_\lambda(D_{1/2}^n)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

の可換図で、横列はすべて inclusion からの誘導である。このとき、

$$(X_n, X_{n-1}) \hookrightarrow (X_n, X_{n-1} \cup \varphi_\lambda(D_1^n))$$

は homotopy 同値であるため、

$$(E_n, E_{n-1}) \hookrightarrow (E_n, E_{n-1} \cup p^{-1}\varphi_\lambda(D_1^n))$$

も homotopy 同値である。また切除定理を使えば、この横列はすべて同型である事がわかる。そして、一番右の縦列を考えれば、

$$\varphi_\lambda|_{D_0^n} : D_0^n \longrightarrow \varphi_\lambda(D_0^n)$$

が同相であり、その pull back での fber map は Lemma 0.1.5 やはり同相である。よって元の可換図は右列は同型であるため、左列が同型である。係数の M はスペース上省いてしまったが、あっても成立する。

□

Corollary 0.1.7

$p : E \longrightarrow X$ を CW 複体上の fibration とする。このとき、

$$H_p(X_p, X_{p-1}) \otimes H_q(F; M) \cong E^1_{p,q}(E)$$

が存在する。

proof)　キュネットの公式を用いれば、

$$H_p(X_p, X_{p-1}) \otimes H_q(F; M) \cong \oplus H_p(D^p, S^{p-1}) \otimes H_m(F; M) \cong \oplus H_{n+m}(D^n \times F, S^{n-1} \times F; M)$$

$E^1_{p,q}(E) = H_{p+q}(E_p, E_{p-1}; M)$ だから、Lemma 0.1.6 により求める結果を得る。

□

Definition 0.1.8

Cor 0.1.7 において q を固定すれば、$H_q(F; M)$ を係数と考えられ、

$$\varphi : C_*(X; H_q(F; M)) \longrightarrow E^1_{*,q}(E; M)$$

と言う Chain complex の間の同型が構成できる。ただし、左側は X の胞体的複体である。

ここで φ は、$x \otimes y \in C_p(X; H_q(F; M)) = H_p(X_p, x_{p-1}) \otimes H_q(F; M)$ に対し Hurewiz 準同型、

$$h : \pi_p(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow H_p(X_p, x_{p-1})$$

(X_p, X_{p-1}) は $(p-1)$-connected なのでこれは同型であるため、$[\alpha] \in \pi_*(X_p, X_{p-1})$ が存在し、$h([\alpha]) = x$ となる。

$$\alpha : (D^p, S^{p-1}) \longrightarrow (X_p, X_{p-1})$$

であるので、この pull back から誘導される fiber map

$$p^*(\alpha) : (D^p \times F, S^{p-1} \times F) \longrightarrow (E_p, E_{p-1})$$

を考え、これを、$\tilde{\alpha}$ とかく。

$$\tilde{\alpha}_* : H_{p+q}(D^p \times F, S^{p-1} \times F; M) \longrightarrow H_{p+q}(E_p, E_{p-1}; M)$$

において、$i_p \in H_p(D^p, S^{p-1}) \cong \mathbf{Z}$ を生成元とすると、$\varphi(x \otimes y) = p^*(\alpha)_*(i_p \times y)$ である。

Lemma 0.1.9

$p : E \longrightarrow X$ を CW 複体上の可符合な fibration とする。$f : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ において Y を可縮な空間とする。このとき、

$$\tilde{f}_* : H_{p+q}(Y \times F, B \times F; M) \longrightarrow H_{p+q}(E, p^{-1}(A); M)$$

は f のホモトピー類にのみ依存する。

proof)　　まず f を固定すれば本来 pull back による fiber map $p^*(f) : f^*(E) \longrightarrow E$ は唯一に定まる。だたし、ここでは Y が可縮なので $f^*(E)$ と $Y \times F$ が同型なので同一視した。このときその同一視をした homotopy equivalence である $h : Y \times F \longrightarrow f^*(E)$ の構成を思い出す。定値射と恒等射を繋ぐ homotopy $H : Y \times I \longrightarrow Y$ に対し、$g(y, e) = (*, e), G(y, e, t) = f \circ H(y, t)$ とおき、

$$\begin{tikzcd}
Y \times F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & f^*(E) \arrow[d, "f^*(p)"] \\
Y \times F \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] & Y
\end{tikzcd}$$

に対し、$h(y, e) = \widetilde{H}(y, e, 1)$ としたのであった。

$$\begin{tikzcd}
Y \times F \arrow[r, "h"] \arrow[d] & f^*(E) \arrow[r, "p^*(f)"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "="'] & Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

において、上横列の合成が $\tilde{f}$ である。ここで、h は H やその lift である $\widetilde{H}$ に依存する。そこで、$y \in Y$ において、$\tilde{f}_y = \tilde{f}(y, \quad) : F \longrightarrow E$ を考えると、これは $pr_2 \circ \widetilde{H}(y,$ $,1)$ であるが、先の図式を y に制限すれば、

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "g_y"] \arrow[d] & f^*(E) \arrow[r, "p^*(f)"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
F \times I \arrow[r, "G_y"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}_y"] & Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

の図式で上横列の合成は inclusion であり、G_y は y と $*$ を繋ぐ path から定義されるので、下横列合成は $f \circ H_y : I \longrightarrow X$ と考えられる。というわけで、容認写像の定義に

もどると、

$$\tilde{f}_y = pr_2 \circ \widetilde{H}_{y,1} = L_{f \circ H_y}$$

というわけで $\tilde{f}_y$ は容認写像である事がわかる。ようやく本題に戻るが、$h, h' : Y \times F \longrightarrow f^*(E)$ という 2 つの homotopy equivalence が取れたとする。$\tilde{f} = h \circ p^*(f)$, $\tilde{f}' = h' \circ p^*(f)$ を考えると、$\tilde{f}'_y$ の homotopy inverce を $\tilde{f}'^{-1}_y$ とおくと、$\tilde{f}'^{-1}_y \circ \tilde{f}_y : F \longrightarrow F$ も容認である。

$$\tilde{f}'' = \tilde{f}'(1 \times \tilde{f}'^{-1} \circ \tilde{f}) : Y \times F \longrightarrow E$$

を考えると、可符号性から

$$\tilde{f}''_* = \tilde{f}' \circ (1 \times \tilde{f}'^{-1} \circ \tilde{f})_* = \tilde{f}'_* \circ (1 \times \tilde{f}'^{-1} \circ \tilde{f})_* = \tilde{f}'_*$$

でありまた、

$$\tilde{f}''_y = \tilde{f}'_y \circ \tilde{f}'^{-1}_y \circ \tilde{f}_y \simeq \tilde{f}_y$$

であるので、Lemma 0.1.4 により $\tilde{f}'' \simeq \tilde{f}$ となり、$\tilde{f}''_* = \tilde{f}_*$ となるので、結局、$\tilde{f}_* = \tilde{f}'_*$ である。

また、$f \simeq f' : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ に対し、$H : (Y \times I, B \times I) \longrightarrow (X, A)$ をそのホモトピーとすると、$Y \times I$ も可縮なので、

$$\widetilde{H} : Y \times F \times I \longrightarrow E$$

を考える事ができる。これにより、$\tilde{f} \simeq \tilde{f}'$ となる。

$\square$

Theorem 0.1.10

$p : E \longrightarrow X$ が可符号のとき、

$$\varphi : C_*(X; H_q(F; M)) \longrightarrow E^1_{*,q}(E; M)$$

は Chain map である。

proof)　次の図式の可換を示せばよい。

$$\begin{tikzcd}
H_p(X_p, X_{p-1}) \otimes H_q(F; M) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial \otimes 1"'] & H_{p+q}(E_p, E_{p-1}; M) \arrow[d, "\partial"] \\
H_{p-1}(X_{p-1}, X_{p-2}) \otimes H_q(F; M) \arrow[r, "\varphi"'] & H_{p+q-1}(E_{p-1}, E_{p-2}; M)
\end{tikzcd}$$

$x \otimes y \in H_p(X_p, X_{p-1}) \otimes H_q(F; M)$ に対し、

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \partial \otimes 1(x \otimes y) &= \varphi(\partial x \otimes y) \\
&= \varphi(\partial \circ h([\alpha]) \otimes y) \\
&= \varphi(h \circ \partial[\alpha] \otimes y) \\
&= \varphi(h([\alpha_{|_{S^{p-1}}}]) \otimes y) \\
&= \widetilde{\alpha_{|_{S^{p-1}}}}_*(i_{n-1} \otimes y) \\
&= (\widetilde{\alpha}_{|_{S^{p-1} \times F}})_*(i_{n-1} \otimes y)
\end{aligned}$$

ところで、

$$\begin{tikzcd}
H_p(D^p, S^{p-1}) \otimes H_q(F; M) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\partial \otimes 1"'] & H_{p+q}(E_p, E_{p-1}; M) \arrow[d, "\partial"] \\
H_{p-1}(Sp-1) \otimes H_q(F; M) \arrow[r, "(\widetilde{\alpha}_{|_{S^{p-1} \times F}})_*"'] & H_{p+q-1}(E_{p-1}; M)
\end{tikzcd}$$

の可換図は成り立っており、$\partial(i_n) = i_{n-1}$ だから、上記の等式を続けると、

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \partial \otimes 1(x \otimes y) &= (\widetilde{\alpha}_{|_{S^{p-1} \times F}})_*(i_{n-1} \otimes y) \\
&= \partial(\alpha_*(i_n \otimes y)) \\
&= \partial \circ \varphi(x \otimes)
\end{aligned}$$

である。

□

Theorem 0.1.11

$E^2_{p,q}(E; M) \cong H_p(X; H_q(F; M))$, $E_2^{p,q}(E; M) \cong H^p(X; H^q(F; M))$ である。

proof)　　Theorem 0.1.10 によって、X の $H_q(F; M)$ を係数に持つ胞体的複体と $E^1_{*,q}$ は同型であった。よってこの homology 群をとっても同型となる。胞体的複体の homology 群は特異 homology 群 $H_*(X; H_q(F; M))$ と同型であったし、Spectral 列の定義から、$H_*(E^1_{p,q}(E; M)) \cong E^2_{p,q}(E; M)$ であったので求める結果を得る。cohomology についても同様である。

□

Remmark 0.1.12

任意の空間はCW 複体と weak equivalence であるので任意の fibration の $p\colon E \longrightarrow X$ において、$f:\Gamma X \longrightarrow X$ をその weak equivalence とすれば、その pull back

$$f^*(p):f^*(E) \longrightarrow \Gamma X$$

を考える事により、weak equivalence ならば homology equivalence であるため、$H_*(\Gamma X) \cong H_*(X)$, $H_*(f^*(E)) \cong H_*(E)$ となる事がわかり、$p : E \longrightarrow X$ の spectral 列を $f^*(p):f^*(E) \longrightarrow \Gamma X$ の spectral 列の spectral 列と定義すれば一般の fibration に拡張できる。また、任意の CW 複体は 0-cell が一つの CW 複体と homotopy 同値になるため、0-cell が１つという仮定も本質的に不要である。